

球面上の Vertex Dynamics モデル

吉野 隆¹, 岸本 直子², 松岡 篤³, 栗原 敏之³,
石田 直人³, 木元 克典⁴, 松浦 執⁵

1) 東洋大学, 2) 京都大学, 3) 新潟大学, 4) JAMSTEC, 5) 東京学芸大学

June 29, 2010

内容

研究目的

長井-本多モデル

球面上の VD モデル

球面幾何

ポテンシャルの表現

方程式

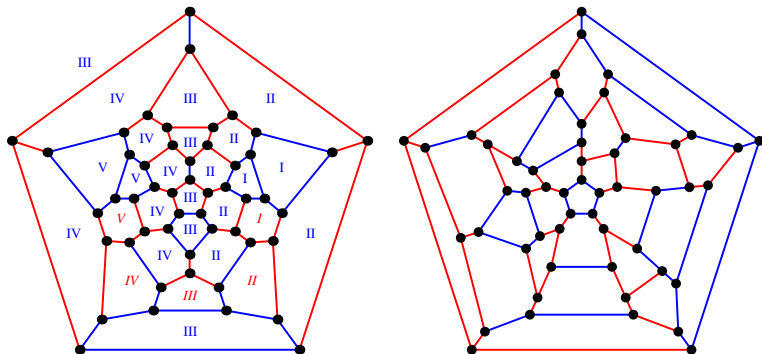
結果

はじめに

- 我々は球形放散虫の骨格構造の幾何モデルについて検討している。
- 数値シミュレーションの結果ではある程度似た構造が現れているものの、個々の種に関して言えばこれまでのモデルで説明しきれない構造（局所的な釣り合いが重要な構造？）も出現してきている。
- 本研究では、長井と本多が提案した Vertex Dynamics モデルを球面上に展開して、その数値解を得ることを目指す。
- さらに、得られた数値解について、球形放散虫の骨格構造との関係について議論することも目指す。

同一種の骨組構造

Pantanelium の骨組構造をグラフで表現したもの。同じ種でありながら、その骨組の幾何学的な構造は大きく異なる。



長井-本多モデル

- 長井と本多は（主に）二次元細胞構造について検討するために Vertex Dynamics モデルを導入した.
- Vertex Dynamics モデルは，辺によって他の3つの頂点と連結された頂点 r_1, r_2, \dots, r_n , の運動を記述する.
- 方程式の解は与えられたポテンシャルエネルギーに対して局所最小化を実現するための頂点配置に到達する.
- 長井-本多モデルの特徴は，ポテンシャルエネルギーを辺長の総和 U_I と多角形面積の分散 U_D としている点にある.

方程式の形

i 番目の頂点についての方程式は以下のようにまとめられる.

$$\eta \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = -\nabla_i (U_I + U_D) \quad (1)$$

- η はポテンシャルエネルギーの緩和のさせ方を決定する摩擦係数
- \mathbf{r}_i は i 番目の頂点の位置 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$
- ∇_i は i 番目の頂点についての位置に関する微分を表す.

$$\nabla_i = (\partial/\partial x_i, \partial/\partial y_i, \partial/\partial z_i)$$

NHモデルにおけるポテンシャル

辺長の総和

$$U_I = \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_{\alpha\beta} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \sigma' \sum_{\langle ij \rangle} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \quad (2)$$

多角形の面積のばらつき (分散 × 面の数)

$$U_D = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (h_{\alpha}^0)^2 (S_{\alpha} - S_{\alpha}^0)^2 \quad (3)$$

$$= \rho' \sum_{\alpha} (S_{\alpha} - S_{\alpha}^0)^2 \quad (4)$$

平面三角形の場合

$$S_{\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{j''}) \times (\mathbf{r}_{j'} - \mathbf{r}_{j''})] \quad (5)$$

特殊な多角形を考えないので、パラメータ $\sigma_{\alpha\beta}$ と $\rho_{\alpha} (h_{\alpha}^0)^2$ は場所に依存しないとした。

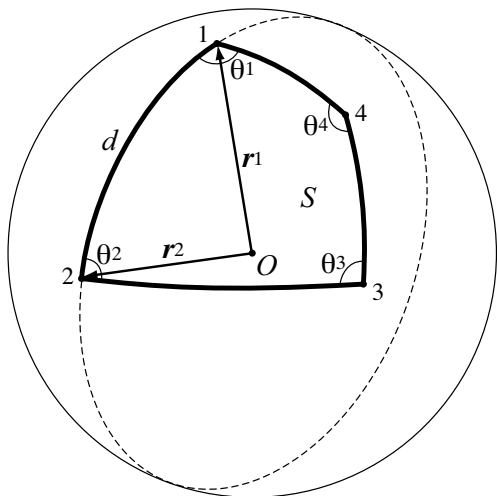
平面の Vertex Dynamics モデル

方程式の最終的な形.

$$\eta \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = -\sigma' \sum_j^{(i)} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - \rho' \sum_j^{(i)} (S_{ij} - S_{ij}^0) [(\mathbf{r}_{j'} - \mathbf{r}_{j''}) \times \mathbf{k}] \quad (6)$$

この方程式を球面上に拡張することを検討する.

球面多角形



図は球面 4 角形の例.

- 辺をつくる線は大円弧である. 従って点 1 と点 2 の距離は,

$$d = \cos^{-1}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2).$$

- n 個の頂点で構成される球面多角形の面積 S_n は, 内角の和から $(n-2)\pi$ を引いたもの.

$$S_n = \sum_{i=1}^n \theta_i - (n-2)\pi$$

球面多角形の面積

例に挙げた球面 4 角形の面積は、各頂点の位置ベクトルを用いると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^4 \theta_i - (4 - 2)\pi \\
 &= -\cos^{-1} \left(\frac{(\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|} \right) \\
 &\quad - \cos^{-1} \left(\frac{(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \cdot (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4)}{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| |\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4|} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4) \cdot (\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4| |\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_1|} \right) \\
 &\quad + 2\pi
 \end{aligned}$$

(最後の 2π は 4 つの θ_i それぞれに π があるため)

ポテンシャル

$$U_I = \sigma' \sum_{\langle i,j \rangle} \cos^{-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j) \quad (7)$$

$$U_D = \rho' \sum_{\alpha} (S_{\alpha} - S_{\alpha}^0)^2$$

S_{α} は球面多角形の面積の公式を用いて計算する. S_{α}^0 は面の数を N とおくと,

$$S_{\alpha}^0 = 4\pi/N$$

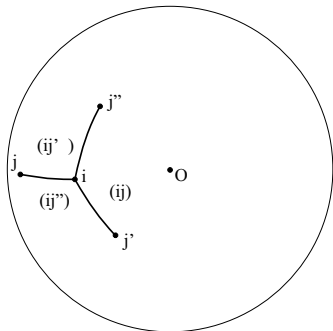
球面多角形の面積

$$S_{ij} = -\cos^{-1}(\mathbf{a}_{ij'} \cdot \mathbf{a}_{j'j''}) - \cos^{-1}(\mathbf{a}_{j'j''} \cdot \mathbf{a}_{j''i}) - \cos^{-1}(\mathbf{a}_{j''i} \cdot \mathbf{a}_{ij'}) + \bar{S} \quad (8)$$

ここで,

$$\mathbf{a}_{ij} = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) / |\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j|$$

としている。 \bar{S} は $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{j'}, \mathbf{r}_{j''}$ を含まない項の集まりを示す。



VD 方程式 (その 1)

$$\eta \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sigma' \sum_j^{(i)} \frac{\mathbf{r}_j}{\sqrt{1 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)^2}} - \rho' \sum_j^{(i)} (S_{ij} - S_{ij}^0) \Delta S_{i,j}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{j'}, \mathbf{r}_{j''})$$

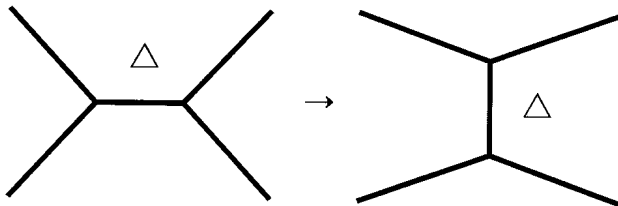
第 1 項は U_I の寄与, 第 2 項は U_D の寄与. ΔS_{ij} は次のように表される.

VD 方程式 (その2)

$$\begin{aligned}
 \Delta S_{i,j}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{j'}, \mathbf{r}_{j''}) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{a}_{ij'} \cdot \mathbf{a}_{j'j''})^2}} \frac{|\mathbf{r}_{j'}|^2 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}_{j'j''})}{|\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_{j'}|^2} \mathbf{a}_{ij'} \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{a}_{j'j''} \cdot \mathbf{a}_{j''i})^2}} \frac{|\mathbf{r}_{j''}|^2 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}_{j'j''})}{|\mathbf{r}_{j''} \times \mathbf{r}_i|^2} \mathbf{a}_{j''i} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{a}_{j''i} \cdot \mathbf{a}_{ij'})^2}} \left(\frac{\mathbf{r}_{j'} \times \mathbf{a}_{j''i}}{|\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_{j'}|} + \frac{\mathbf{a}_{ij'} \times \mathbf{r}_{j''}}{|\mathbf{r}_{j''} \times \mathbf{r}_i|} \right) \\
 &\quad - \frac{(\mathbf{a}_{j''i} \cdot \mathbf{a}_{ij'})}{\sqrt{1 - (\mathbf{a}_{j''i} \cdot \mathbf{a}_{ij'})^2}} \left(\frac{\mathbf{r}_{j'} \times \mathbf{a}_{ij'}}{|\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_{j'}|} + \frac{\mathbf{a}_{j''i} \times \mathbf{r}_{j''}}{|\mathbf{r}_{j''} \times \mathbf{r}_i|} \right)
 \end{aligned}$$

頂点のつなぎ替え

- Vertex Dynamics モデルにおける重要なアイデアは頂点のつなぎ替えがある。
- これは、連結された2点が十分に近いときに、図のようなつなぎ替えを起こさせること。
- 多面体の頂点数の増減が行えることが利点。
- 現在は導入出来ていない。



結果

試みたこと.

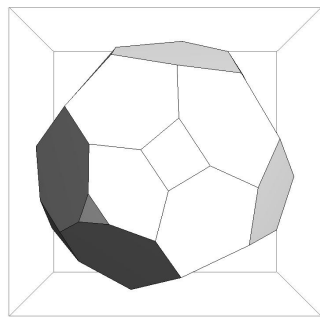
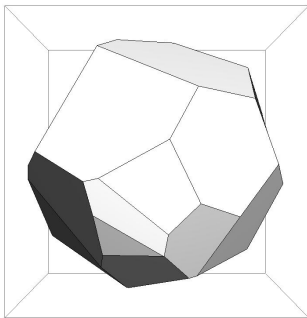
- 27 穴 *Pantanelium* に対応するように、面の数が 27 であるような Vertex Dynamics モデルを球面上で計算する.
- 27 個のランダムな点を球面上に配置し、ポロノイ分割することによって初期配置を得る.
- 球面上の Vertex Dynamics 方程式に従って、頂点位置を変更させ変動が微小になるまで計算を進める.

検討事項.

- U_I のみを考える.
- U_D のみを考える.
- つなぎ替えの意味を考える.

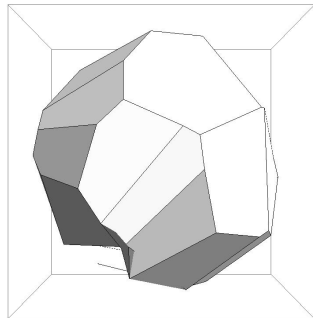
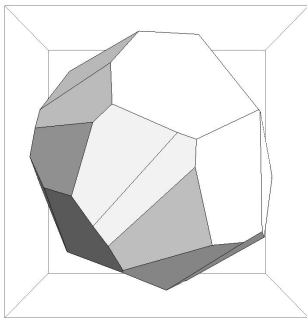
U_I のみを考える

- 頂点はバランスよく分布する傾向にある。
- 結果的に、各頂点は正多角形に近づく。
- しかし、面積や頂点数の違いのため、ばらつきは残る。



U_D のみを考える

- 頂点は面積が平均に近づくように運動しているようである。
- 頂点間を近づけるような点の位置変更を許す。
- 頂点のつなぎ替えがないと破綻する。



まとめ

- プランクトンの骨格構造に対しての適用性を調べるために、球面上の Vertex Dynamics モデルの構築を試みた。
- 現在のところ、方程式の数値解法は予想される結果を出していると考えられる。
- 頂点のつながぎ替えについては今後の課題である。
- 頂点のつながぎ替えによって、どのような多面体構造が出現するのかは興味深い問題である。